

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

6.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

La palabra *ecuación* viene del latín, de *aequatus*, participio pasivo de *aequare*: “*igualar, volver igual*”. Una ecuación es una afirmación de igualdad entre dos expresiones matemáticas. Resolver la ecuación significa encontrar la o las condiciones requeridas o necesarias para que se cumpla la igualdad propuesta.

Así, cuando se establece que $3x^2 + 5x = 0$ es igual a cero, en ese momento se ha creado una ecuación, pues hay una afirmación de igualdad entre dos expresiones, o sea $3x^2 + 5x = 0$ condicionada a ciertos valores de x . Otra cosa distinta es investigar qué se requiere para que realmente $3x^2 + 5x$ sea igual a cero; cuando se hace esa investigación se llega a que se requiere que la equis sea $x = 0$, o bien $x = -\frac{5}{3}$. Eso es resolver la ecuación anterior.

Una ecuación es una especie de «adivinanza numérica», o sea que se hace un planteamiento cuya respuesta debe ser un número. Por ejemplo: *¿Qué número elevado al cuadrado es igual al doble de ese número más veinticuatro?* Es una adivinanza cuya respuesta es el número 6. La diferencia entre cualquier adivinanza con las *adivinanzas numéricas*, llamadas ecuaciones, es que para responder

las primeras hay que atinarle a la respuesta, mientras que en las numéricas existen procedimientos que conducen certera e infaliblemente a la solución.

Así, en el caso anterior, se puede plantear que

$$\begin{aligned}x^2 &= 2x + 24 \\x^2 - 2x - 24 &= 0 \\(x - 6)(x + 4) &= 0\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 \\x_2 &= -4\end{aligned}$$

Entonces, una ecuación trigonométrica también va a ser una especie de «adivinanza numérica», solamente que relacionada con una función trigonométrica. Por ejemplo: *El seno de un ángulo más el coseno de ese mismo ángulo es igual a 1.328926, ¿Cuál es ese ángulo?* El alumno puede comprobar con su calculadora que la respuesta es 25°; pero evidentemente que esa respuesta no es posible encontrarla al tanteo. Debe existir un procedimiento matemático que lleve a la solución, el cual es el planteamiento de una ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = 1.328926$$

Resolver ecuaciones como la anterior es el objetivo de este capítulo. Para su estudio conviene clasificar las ecuaciones trigonométricas y mencionar el método de solución que les corresponda. En cualquiera de los casos se llegará al final del procedimiento a una función trigonométrica inversa la cual tiene dos soluciones según se vio en el capítulo 3. Esto último es fundamental para llegar a las respuestas correctas.

6.2 DESPEJE DIRECTO

Las ecuaciones trigonométricas más sencillas son las que se resuelven simplemente despejando la función trigonométrica y luego aplicando la función inversa para despejar el argumento. **El argumento es el ángulo**, que no necesariamente es x . Esto es importantísimo tenerlo presente para despejar correctamente como se verá en ejemplos a continuación.

Es fundamental recordar también que **todas las funciones trigonométricas inversas tienen dos soluciones**, según lo visto en las páginas 83 a 87 del capítulo 4.

Ejemplo 1: $\cos 2x = 0.642787609$

Solución: En este caso, la función trigonométrica ya está despejada. El argumento, o sea el ángulo, es **2x**. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 0.642787609 \\ 2x &= \text{arc cos } 0.642787609\end{aligned}$$

Como el coseno es positivo en el primero y cuarto cuadrantes, tiene dos soluciones (ver capítulo 4) que son:

Primer cuadrante:	Cuarto cuadrante:
$2x_1 = 50$	$2x_2 = 360 - 50$
$x_1 = \frac{50}{2}$	$2x_2 = 310$
$x_1 = 25$	$x_2 = \frac{310}{2}$
	$x_2 = 155$

Las soluciones de la ecuación son

$$\begin{aligned}x_1 &= 25 \\ x_2 &= 155\end{aligned}$$

¡Cuidado!: Al afirmar que existen dos soluciones en la ecuación trigonométrica, se refiere a que el *arco coseno* de 0.642787609 es 50 grados y también 310 grados los cuales son iguales al

argumento $2x$. No debe confundirse entonces entre que esos valores sean iguales a x a que sean iguales al argumento, en este caso a $2x$. La realidad es que esos valores deben ser iguales siempre al argumento.

Ejemplo 2: $5 + \tan 6x = 3.267949192$

Solución: El argumento, o sea el ángulo es $6x$ en este caso. Despejando primero la función trigonométrica:

$$\begin{aligned} \tan 6x &= 3.267949192 - 5 \\ \tan 6x &= -1.732050808 \end{aligned}$$

Aplicando la función inversa para despejar el argumento $6x$ (no x), se obtiene:

$$6x = \text{arc tan} (-1.732050808)$$

$6x$ es el ángulo, que tiene dos soluciones, las cuales están en el segundo y cuarto cuadrantes ya que en dichos cuadrantes la tangente es negativa. Conforme a lo visto en la página 81, se saca primero la tangente inversa al valor absoluto para obtener que $\text{arc tan } 1.732050808 = 60$. Entonces las dos soluciones son:

Segundo cuadrante:
$6x_1 = 180 - 60$
$6x_1 = 120$
$x_1 = \frac{120}{6}$
$x_1 = 20$

Cuarto cuadrante:
$6x_2 = 360 - 60$
$6x_2 = 300$
$x_2 = \frac{300}{6}$
$x_2 = 50$

Ejemplo 3: $\text{sen}(2x + 8) = -0.93969262$

Solución: En este caso la función trigonométrica seno ya está despejada. El ángulo, o sea el argumento es $(2x + 8)$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{sen}(2x + 8) &= -0.93969262 \\ (2x + 8) &= \text{arc sen}(-0.93969262) \end{aligned}$$

$(2x + 8)$ es el ángulo, el cual tiene dos soluciones, las que están en el tercero y cuarto cuadrantes, ya que allí el seno es negativo. Conforme a lo visto en la página 84, se saca primero *arco seno* al valor absoluto para obtener que $\text{arc sen } 0.93969262 = 70$. Entonces, tomando en cuenta que el valor anterior (70) es igual al argumento, las dos soluciones son:

Tercer cuadrante:
$2x_1 + 8 = 180 + 70$
$2x_1 + 8 = 250$
$2x_1 = 242$
$x_1 = \frac{242}{2}$
$x_1 = 121$

Cuarto cuadrante:
$2x_2 + 8 = 360 - 70$
$2x_2 + 8 = 290$
$2x_2 = 282$
$x_2 = \frac{282}{2}$
$x_2 = 141$

Las soluciones de la ecuación son

$x_1 = 121$
$x_2 = 141$

Ejemplo 4: $\cos(x^2 + 10) = 0.275637355$

Solución: En este caso el ángulo, o sea el argumento es $(x^2 + 10)$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\cos(x^2 + 10) = 0.275637355$$

$$x^2 + 10 = \arccos 0.275637355$$

como el *arco coseno* de 0.275637355 es igual a 74, las dos soluciones, las cuales están en el primero y cuarto cuadrantes, ya que allí el coseno es positivo, son:

Primer cuadrante:
$x^2 + 10 = 74$
$x^2 = 74 - 10$
$x^2 = 64$
$x = \pm \sqrt{64}$
$x_1 = 8$
$x_2 = -8$

Cuarto cuadrante:
$x^2 + 10 = 360 - 74$
$x^2 + 10 = 286$
$x^2 = 286 - 10$
$x^2 = 276$
$x_3 = +\sqrt{276}$
$x_4 = -\sqrt{276}$

Las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = \pm 8$$

$$x_2 = \pm \sqrt{276}$$

que también se escribe como

$x_1 = \pm 8$ $x_2 = \pm 16.6132$

EJERCICIO 6.1

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

- | | |
|---|--|
| 1) $\text{sen } 3x = 0.707106781$ | 2) $\text{cos } 4x = 0.882947592$ |
| 3) $\text{tan } 8x = 5.671281820$ | 4) $\text{sen } 10x = 0.766044444$ |
| 5) $\text{cos } 2x = -0.913545457$ | 6) $\text{tan } 7x = 1.482560969$ |
| 7) $\text{sen } (3x + 2) = -0.529919264$ | 8) $\text{cos } (x - 7) = -0.788010753$ |
| 9) $\text{tan } (5x + 7) = -1.962610506$ | 10) $\text{sen } (9 - 2x) = -0.087155742$ |
| 11) $\text{cos } 5x^2 = -0.422618261$ | 12) $\text{tan } 3x^2 = -3.077683537$ |
| 13) $\text{sen } (x^2 + 2) = 0.992546151$ | 14) $\text{cos } (x^2 - 50) = 0.069756473$ |
| 15) $\text{tan } (x + 70) = -1.962610506$ | 16) $\text{sen } (49 - 2x) = -0.087155742$ |
| 17) $\text{cos } 2x^2 = -0.422618261$ | 18) $\text{tan } (75 - 3x^2) = -3.077683537$ |
| 19) $\text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.5$ | 20) $\text{cos} \left(\frac{4}{3x} \right) = 0.5$ |

6.3 ECUACIONES DE LA FORMA: $m \text{ sen } x = n \text{ cos } x$

Las siguientes ecuaciones trigonométricas más sencillas de resolver son las que tienen la forma $m \text{ sen } x = n \text{ cos } x$, donde m y n son números conocidos. Basta transformar la ecuación a la forma

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{n}{m}$$

dividiendo la ecuación original entre $m \text{ cos } x$ (lo que indebidamente se dice que “pasa a dividir el *coseno* y m al otro lado”) y sustituir el cociente *seno* entre *coseno* por la *tangente*, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 91. Luego simplemente se despeja la tangente aplicándole la función inversa y teniendo cuidado de localizar los dos valores que le corresponden por el signo de la función, conforme a lo visto en el capítulo 3.

Ejemplo 5: $4 \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{cos} x$

Solución: En este caso, $m = 4$ y $n = 3$. La ecuación se puede escribir como:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{3}{4}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 91, y como

$$\frac{3}{4} = 0.75, \text{ se llega a que}$$

$$\tan x = 0.75$$

aplicándole la función inversa:

$$x = \operatorname{arc} \tan 0.75 = 36.87$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva:

Primer cuadrante
$x_1 = 36.87$

Tercer cuadrante
$x_2 = 180 + 36.87$
$x_2 = 216.87$

Las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = 36.87$
$x_2 = 216.87$

Ejemplo 6: $5 \operatorname{sen} x + 11 \operatorname{cos} x = 0$

Solución: Restando $11 \operatorname{cos} x$ en ambos lados (lo que indebidamente se dice que el $11 \operatorname{cos} x$ “pasa al otro lado a restar”), la ecuación queda en la forma $m \operatorname{sen} x = n \operatorname{cos} x$. Haciéndolo:

$$5 \operatorname{sen} x = -11 \operatorname{cos} x$$

En este caso, $m = 5$ y $n = -11$. Dividiendo toda la igualdad anterior entre $5 \cos x$ (lo que indebidamente se dice que el 5 y el $\cos x$ pasan al otro lado a dividir), se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -\frac{11}{5}$$

sustituyendo por la tangente, fórmula (7) de la página 91, y como $\frac{11}{5} = 2.2$, se llega a que

$$\tan x = -2.2$$

aplicándole la función inversa:

$$x = \operatorname{arc} \tan (-2.2)$$

la cual tiene dos soluciones, una en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que allí la tangente es negativa. Primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de (-2.2) , lo que da $\operatorname{arc} \tan 2.2 = 65.556$, se tiene que:

Segundo cuadrante	Cuarto cuadrante
$x_1 = 180 - 65.556$	$x_2 = 360 - 65.556$
$x_1 = 114.443$	$x_2 = 294.443$

Las soluciones de la ecuación son

$$\begin{aligned} x_1 &= 114.443 \\ x_2 &= 294.443 \end{aligned}$$

Ejemplo 7: $10 \operatorname{sen} 4x - 5 \operatorname{cos} 4x = 0$

Solución: Sumando $5 \operatorname{cos} 4x$ en ambos lados (lo que incorrectamente se dice que $-5 \operatorname{cos} 4x$ pasa al otro lado a sumar), la ecuación queda en la forma $m \operatorname{sen} x = n \operatorname{cos} x$. Haciéndolo:

$$10 \operatorname{sen} 4x = 5 \operatorname{cos} 4x$$

en este caso, $m = 10$ y $n = 5$. Dividiendo toda la igualdad anterior entre $10 \operatorname{cos} 4x$ (lo que erróneamente se dice que pasan a dividir), se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{cos} 4x} = \frac{5}{10}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 91, y como

$$\frac{5}{10} = 0.5, \text{ se llega a que}$$

$$\tan 4x = 0.5$$

aplicándole la función inversa:

$$4x = \operatorname{arc} \tan 0.5$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva. Recordando que primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de 0.5, lo que da $\operatorname{arc} \tan 0.5 = 26.565$, se tiene que:

Primer cuadrante
$4x_1 = 26.565$
$x_1 = \frac{26.565}{4}$
$x_1 = 6.641$

Tercer cuadrante
$4x_2 = 180 + 26.565$
$4x_2 = 206.565$
$x_2 = \frac{206.565}{4}$
$x_2 = 51.641$

las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = 6.641$$

$$x_2 = 51.641$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

EJERCICIO 6.2

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

1) $2 \operatorname{sen} x = \cos x$

3) $\operatorname{sen} 9x - \cos 9x = 0$

5) $\cos 2x - 7 \operatorname{sen} 2x = 0$

7) $\operatorname{sen} (3x + 2) = 5 \cos (3x + 2)$

9) $20 \operatorname{sen} (5x + 7) = -5 \cos (5x + 7)$

2) $5 \cos x = 6 \operatorname{sen} x$

4) $12 \operatorname{sen} 10x = 4 \cos 10x$

6) $8 \operatorname{sen} (2x - 2) = 4 \cos (2x - 2)$

8) $\cos (x - 7) - 3 \operatorname{sen} (x - 7) = 0$

10) $12 \operatorname{sen} (9 - 2x) = 6 \cos (9 - 2x)$